LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 16 / Janeiro / 2020 Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas

1. Considere as seguintes afirmações:

(20) **(a)** Matrizes equivalentes por linha têm a mesma característica.

(20) **(b)** Se μ é valor próprio da matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ e **w** é um vector próprio de B associado a μ, então μ é também valor próprio da matriz B^T e **w** é também um vector próprio de B^T associado a μ.

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta ou apresente um contra-exemplo para justificar cada resposta.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -5 & -10 & -5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

(30) **(a)** Calcule os valores próprios de A.

(20) **(b)** Apresente o subespaço próprio associado ao menor valor próprio de A.

(15) **(c)** Apresente uma matriz diagonal semelhante à matriz A.

3. Considere a aplicação linear $f: \mathbb{P}_3(x) \rightarrow \mathbb{P}_1(x)$ definida por

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = a - b + c + dx \qquad \forall\, (ax^3 + bx^2 + cx + d) \in \mathbb{P}_3(x).$$

(25) **(a)** Defina aplicação sobrejectiva e averigue se f é sobrejectiva.

(20) **(b)** Considere $\mathcal{C} = \{ax^3 + ax^2 + bx + b : a, b \in \mathbb{R}\}$. Apresente uma sequência geradora de $f(\mathcal{C})$.

4. Sejam E e V dois espaços vectoriais de dimensão finita e $\Phi: E \rightarrow V$ uma aplicação linear injectiva.

(30) **(a)** Prove que se F é um subespaço de E com dimensão k então $\Phi(F)$ é um subespaço de V com dimensão k.

(20) **(b)** Use o resultado enunciado na alínea anterior para provar que a aplicação linear Φ é sobrejectiva se e só se $dim\,(E) = dim\,(V)$.